***Практичне заняття***

**Тема:** Тригонометричні формули додавання та наслідки з них.

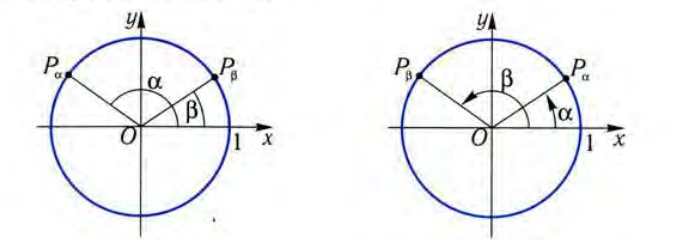
**Мета:** Вивести формули тригонометричних функцій суми і різниці двох чисел. Формулювати вміння користуватися цими формулами для перетворення тригонометричних виразів.

**План практичного заняття:**

1. **Формули косинуса суми та косинуса різниці.**
2. **Формули синуса суми та синуса різниці.**
3. **Формули тангенса суми та тангенса різниці.**
4. **Формули подвійного аргументу.**
5. **Формули пониження степеня.**
6. **Формули половинного аргументу.**
7. **Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток.**
8. **Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.**

**1.Формули косинуса суми та косинуса різниці.**

***Формули зведення*** дозволяють вважати, що кути належать проміжку . Розглянемо на тригонометричному колі точки , маючи на увазі, що вектори утворюють кути з віссю абсцис. Кут між векторами може дорівнювати , якщо (рис.1), , якщо (рис.2).



***Рис.1 Рис.2***

У будь-якому з цих випадків косинус цього кута дорівнює

Точки мають відповідно координати ***(***

Такі самі координати мають і вектори **.**

За означенням скалярного добутку:

оскільки **.**

Оскільки скалярний добуток векторів  **і** виражається через їхні координати за формулою за формулою : **,**

то маємо:

Порівнявши одержані результати, матимемо:

***.***

* **Косинус різниці двох кутів дорівнює сумі добутків косинусів та синусів цих кутів**.

Як наслідок, отримуємо формулу косинуса суми кутів:

З урахуванням парності косинуса і непарності синуса, одержимо:

* **Косинус суми двох кутів дорівнює різниці добутків косинусів та синусів цих кутів.**

**2.Формули синуса суми та синуса різниці.**

Виведемо тепер формули синуса суми двох кутів. Скориставшись формулами зведення і косинуса різниці двох кутів, матимемо:

Отже,

* **Синус суми двох кутів дорівнює добутку синуса першого кута на косинус другого плюс добуток косинуса першого кута на синус другого.**

Для синуса різниці маємо:

Таким чином,

* **Синус різниці двох кутів дорівнює добутку синуса першого кута на косинус другого мінус добуток косинуса першого кута на синус другого.**

**Задача 1.**

Обчислити

**Розв’язання:**

***Відповідь:***

**Задача 2.**

Спростити вираз: **.**

**Розв’язання:**

***Відповідь:***

**Задача 3.**

Знайти

**Розв’язання:**

Оскільки – кут ІІ чверті, то

Маємо:

Тоді

***Відповідь:***

**Задача 4.**

Обчислити **,** якщо:

**Розв’язання:**

З фомули косинуса різниці двох кутів випливає, що для розв’язання задачі необхідно знайти

З основної тригонометричної тотожності можна знайти **:**

Оскільки **,** тому

Аналогічно обчислимо З основної тригонометричної тотожності маємо: **.**

Оскільки то

Тепер можна обчислити за фомулою косинуса різниці двох кутів:

***Відповідь:***

**Задача 5.**

Спростити вираз: **.**

**Розв’язання:**

Неважко помітити, що даний вираз – це права частина формули де

Отже,

***Відповідь:***

**3.Формули тангенса суми та тангенса різниці.**

Використовуючи одержані формули синуса і косинуса суми двох аргументів, можна вивести фомули додавання для тангнса. Виразимо через за умови, що кожен із цих виразів має зміст, тобто , що

Маємо:

Поділимо чисельник чисельник і знаменник дробу на добуток

* **Тангенс різниці двох аргументів дорівнює різниці тангенсів зменшуваного і від’ємника, поділеній на суму одиниці і добутку цих тангенсів.**

Для тангенса суми матимемо:

* **Тангенс суми двох аргументів дорівнює сумі тангенсів доданків, поділеній на різницю між одиницею і добутком цих тангенсів.**

**Задача 6.**

Обчислити **.**

**Розв’язання:**

Представимо у вигляді суми

Тоді користуючись формулою тангенса суми двох кутів, знайдемо:

**tg**

***Відповідь:***

**Задача 7.**

Обчислити: ***1)***

**Розв’язання:**

***Відповідь:***

**4.Формули подвійного аргументу.**

Тепер розглянемо формули, що є ***наслідками* *формул додаваня*.**

Формулає істинною для будь-яких значень Якщо припустимо, що **,** матимемо: **,** тобто

Отримали формулу ***синуса подвійного кута.***

Аналогічно для формули**,** коли матимемо:**,** тобто

Отримали формулу ***косинуса подвійного кута.*** Якщо в отриману формулу спочатку замість  підставити , а потім замість підставимо **,** отримаємо ще дві формули косинуса подвійного кута:



Так само з формули отримаємо формулу тангенса подвійного кута , тобто

Отримали ***формулу тангенса подвійного кута***, яка є істинною, коли існують.

**Задача 8.**

Знайти значення  **,** якщо

**Розв’язання:**

За формулою косинуса подвійногь кута маємо:

**Відповідь:**

**Задача 9.**

Спростити вираз: 1)  **;** 2) **.**

**Розв’язання:**

1. **.**

**Відповідь:**

**Задача 10.**

Обчислити:

**Розв’язання:**

**Відповідь: 0,25**

Отримані формули можна застосовувати до будь-якого кута **2**, адже будь-який кут можна подати як подвійний.

Наприклад, **.**

***.***

**5.Формули пониження степеня.**

Якщо з формул  і

виразити відповідно і , отримаємо :



Ці формули називають ***формулами пониження степеня.***

Вони дають можливість записати квадрати синуса і косинуса кута через косинус кута ***2***.

**,** ще одна формула пониження степеня.

**Задача 11.**

Понизити степінь виразу: 1) **2) 3)**

**Розв’язання:**

1. **.**

**6.Формули половинного аргументу**

Якщо у формулах **, ,** замість кута підставити отримаємо формули половинного аргументу (кута):



**Задача 12.**

Знайти

**Розв’язання:**

За формулою половинного кута **.**

Оскільки , то тобто **,** отжеі тому

**7.Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток.**

Розглянемо ще кілька формул, що є наслідками формул додавання. При розв’язуванні тригонометричних рівнянь або нерівностей корисно вміти подавати суму і різницю синусів або косинусів у вигляді добутку тригонометричних функцій. Такі формули широко застосовуються у різних перетвореннях тригонометричних виразів. Додамо почленно формули додавання:

**+**

Нехай **.** Тоді **,** тобто

Підставимо ці вирази для у вище знайдену суму формул додавання.

Отримаємо:

* **–** формула суми синусів

Замінимо в цій формулі одержимо:

* – формула різниці синусів

Аналогічно можна отримати :

* **–** формула суми косинусів
* **–** формула різниці косинусів
* **–** формула суми тангенсів
* **–** формула різниці тангенсів

**Задача 13.**

Подати у вигляді добутку вираз:

**1) 2)**

**Розв’язання:**

1)За формулою суми синусів:

***2)***Використовуємо формулу різниці косинусів, ураховуючи, що за формулою зведення Матимемо:

**Задача 14.**

Подати вираз у вигляді добутку.

**Розв’язання:**

Спочатку винесемо число 2 за дужки, та врахуємо, що , далі використаємо формулу суми косинусів.

Маємо:

**.**

**8.Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.**

**Задача 15.**

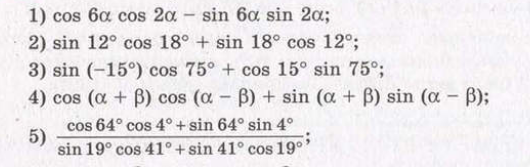
Обчислити

**Розв’язання:**

Перетворимо добуток синусів у суму:

***Домашнє завдання:***

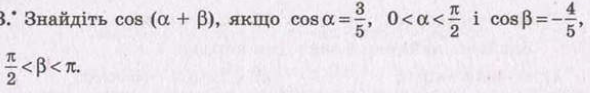
1. Спростіть вираз:



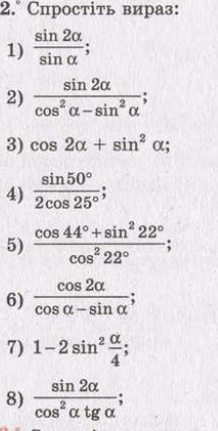
**2.**



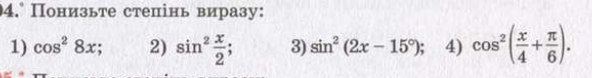
**3**.



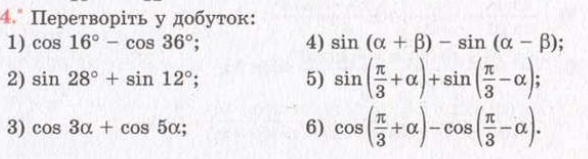
4.



**5.**



**6.**



**7.**

